概均質ベクトル空間の1つの同値変形について(概均質ベクトル空間とその周辺 : 新谷卓郎特集号)

数理解析研究所講究録
497巻 1983年 201-204

概均質ベクトル空間の1つの同値変形について

筑波大 数学研究科
保倉 理美

問題 G, G'を単純複素代数群，$\rho_1,\cdots,\rho_\ell;\rho_1',\cdots,\rho_\ell'$を各々の既約複素有理表現とし，$GL(1)$の恒等表現□と合わせて，$\rho_0$を

$$\rho_0=\underbrace{\square\hat{\otimes}1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}1}_{\ell}\hat{\otimes}\rho_1\hat{\otimes}\rho_1'\oplus\underbrace{1\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}1}_{\ell}\hat{\otimes}\rho_2\hat{\otimes}\rho_2'\oplus\cdots\oplus\underbrace{1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}1\hat{\otimes}\square}_{\ell}\hat{\otimes}\rho_\ell\hat{\otimes}\rho_\ell'$$

とおけば，ρ_0は$GL(1)^\ell\times G\times G'$のほぼ一般の表現を与える．そこで，$(GL(1)^\ell\times G\times G', \rho_0, V(\deg\rho_0))$が，$V(\deg\rho_0)$上Zariski-dense-$GL(1)^\ell\times G\times G'$-orbit を持つ(i.e.,概均質ベクトル空間 Prehomogeneous vector space, abbrev., P.V.)かどうかを判定したい．($\hat{\otimes}$は外部テンソル積とする.)

上の問題は，$\ell=1$のときは既約概均質ベクトル空間の分類(Sato-Kimura [1])に帰着し，$\rho_1'=\cdots=\rho_\ell'=1$のときは単純概均質ベクトル空間の分類(Kimura[2])そのものである．特に$\ell=1$のときの結果より各$\rho_i\hat{\otimes}\rho_i'$ $(i=1,\cdots,\ell)$の候補が相当に制限される．例えば$G'=SL(m')$，$\rho_i'=\square$のとき．
もし$\deg\rho_i>m'$ならば，$(G,\rho_i,V(\deg\rho_i))$は次のいずれかになる．

$(SL(m), \square, V(m))$, $(Sp(m), \square, V(2m))$, $(SO(m), \square, V(m))$,
$(SL(3), \square\!\square, V(6))$, $(SL(6), \text{日}, V(15))$, $(SL(2m+1), \text{日}, V(m(2m+1)))$
$(Spin(7), \text{spin}, V(8))$, $(Spin(10), \text{half-spin}, V(32))$, $(G_2, V(7))$, $(E_6, V(27))$.
これに対し, $\deg\rho_i \leqq m'$ ならば, $(G, \rho_i, V(\deg\rho_i))$ は任意の既約表現が可能である. 実際, $(GL(1)\times G\times SL(m'), \square\hat{\otimes}\rho_i\hat{\otimes}\square, V(1)\hat{\otimes}V(\deg\rho_i)\hat{\otimes}V(m'))$ は trivial P.V. である. (Sato-Kimura [1] p.43 Definition 5) このときは各既約成分をバラバラに考えていたのでは十分に ρ_i を制限することができない. (cf. $(GL(m), \square\otimes\square, V(m)\otimes V(m)) = (GL(m), \text{日}\oplus\square\!\square, V(\frac{m(m-1)}{2})\oplus V(\frac{m(m+1)}{2}))$: non P.V.)

上の問題への第一歩として, $G' = SL(2n+1)$, $\rho_1' = \text{日}$, $\rho_2' = \rho_3' = \cdots = \rho_x' = \square$ のときを考える. すると上の考察より自然に次の問題に導びかれる:

問題 $(G\times GL(2n+1), 1\hat{\otimes}\text{日}\oplus\rho\hat{\otimes}\square, V(n(2n+1))\oplus V(\deg\rho)\hat{\otimes}V(2n+1))$; $\deg\rho \leqq 2n+1$. を, ρ (従って G) が制限可能な形にP.V.同値変形せよ.

次の結果を得た:

定理 Gを複素代数群, ρをそのm次元複素有理表現とするとき 次は同値である: 但し, $m \leqq 2n+1$ とする. (for 4°)

1° $(G\times GL(2n+1), 1\hat{\otimes}\text{日}\oplus\rho\hat{\otimes}\square, V(n(2n+1))\oplus V(m)\otimes V(2n+1))$: P.V. (i.e., 概均質ベクトル空間であること.)

2°. $(G\times GL(2n+1)\times Sp(n),\ 1\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}\square\oplus\rho\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}1,$
$V(1)\otimes V(2n+1)\otimes V(2n)\oplus V(m)\otimes V(2n+1)\otimes V(1))$: P.V.

3°. $(G\times GL(m-1)\times Sp(n),\ 1\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}\square\oplus\rho^*\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}1,$
$V(1)\otimes V(m-1)\otimes V(2n)\oplus V(m)^*\otimes V(m-1)\otimes V(1))$: P.V.

4°. $(G\times GL(m-1),\ 1\hat{\otimes}\boxminus\oplus\rho^*\hat{\otimes}\square,\ V(\frac{(m-1)(m-2)}{2})\oplus V(m)^*\otimes V(m-1))$
: P.V.

証明　1°⇔2° は，1° の $1\hat{\otimes}\boxminus$ における generic isotropy subgroup の $GL(2n+1)$ 成分と，2° の $1\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}\square$ における generic isotropy subgroup の $GL(2n+1)$ 成分が，等しくとれることによる（cf. Sato-Kimura [1] p.36 Lemma 5）．実際，[1] p.76 (5.1) と p.73 (1) のように，

$$\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}Sp(n)\\ \square\end{matrix} & \begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix} \\ \hline 0 & * \end{array}\right] & \begin{matrix}\}2n\\ \}1\end{matrix}\\ \begin{matrix}\underbrace{\qquad}_{2n} & \underbrace{\ }_{1}\end{matrix} & \end{array}$$

である．

2°⇔3° は，2° を $(GL(2n+1)\times(G\times Sp(n)),\ \square\hat{\otimes}(1\hat{\otimes}\square\oplus\rho\hat{\otimes}1))$ と考えて，$GL(2n+1)$ で裏返し変換（[1] p.37 Proposition 7）をすれば 3° を得る．

3°⇔4° は，$m\leqslant 2n+1$ を用いる．まず，4° の $1\hat{\otimes}\boxminus$ における generic isotropy subgroup の $GL(m-1)$ 成分は，m が偶数のとき

$$\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}Sp(\frac{m}{2}-1)\\ \square\end{matrix} & \begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix} \\ \hline 0 & * \end{array}\right] & \}1\\ \begin{matrix}\qquad\qquad & \underbrace{\ }_{1}\end{matrix} & \end{array}$$

に，奇数のとき $\left[\begin{matrix}Sp(\frac{m-1}{2})\\ \square\end{matrix}\right]$ に，とれる．

（[1] p.75 (5)）一方，$m-1\leqslant 2n$ 故，3° の $1\hat{\otimes}\square\hat{\otimes}\square$ における generic isotropy subgroup の $GL(m-1)$ 成分は，[1] p.100

(15)より上と同じにとれる. 以上.

注 3°⇔4°($m-1 \leqslant 2n$)は, [1] p.40 Proposition 13を用いれば直接であるが, 1°⇔2°には使えない. ($\because 2n+1 > 2n$.)

この小論の準備を通して, 木村達雄先生から色々とアドバイスを頂きましたことに感謝します.

References

[1] M. Sato and T. Kimura, A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J. Vol. 65 (1977), 1–155.

[2] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiples, to appear in J. Algebra.